

**7 класс**

*Время выполнения заданий – 3 часа 55 минут (235 минут).*

*Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.*

*Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.*

7.1. Собираясь на прогулку, Маша взяла под кроватью, на полке, на столе и на батарее шарф, перчатки, шапку и кроссовки. Под кроватью она взяла не шапку и не перчатки. Шапка и, конечно, кроссовки, не лежали на столе. Перчаток не было ни на столе, ни на полке. Что где лежало, если в каждом из мест находился только один предмет? Ответ объясните.

**Ответ:** шапка лежала на полке, шарф — на столе, перчатки — на батарее, кроссовки стояли под кроватью.

**Решение:** По условию, перчатки не могли лежать ни на полке, ни на столе, ни под кроватью. Значит, они могли быть только на батарее. Поэтому шапка на батарее лежать не могла. Но ее не было ни на столе, ни под кроватью. Следовательно, шапка лежала на полке. Тогда на столе мог лежать только шарф, и, значит, под кроватью могли быть только кроссовки.

**Критерии проверки:**

получен верный ответ, который обоснован любым из способов: словесными рассуждениями, графической схемой, логической таблицей и пр. - 7 баллов, верно определено и обосновано местонахождение одного или двух предметов, а места остальных перепутаны или вовсе не установлены -3 балла,

приведен только верный ответ - 2 балла,

в ответе содержится хотя бы одна ошибка, а пояснения отсутствуют - 0 баллов,

в решении использовано некое утверждение из здравого смысла, не вытекающее из условий задачи, то все ответы, полученные из него, не засчитывать.

7.2 При оклейке комнаты обоями выяснили, что потолочных обоев потребовалось меньше, чем обоев на каждую из стен.

Может ли площадь этой комнаты быть больше 10 квадратных метров, если ее высота - 3 метра?

**Ответ:** нет, не может.

**Решение.** Так как на каждую стену нужно обоев больше, чем на потолок, то площадь потолка, а значит, и площадь комнаты меньше, чем площадь каждой из стен. Площадь комнаты равна произведению ширины комнаты и ее длины, а площадь одной из стен равна произведению ширины комнаты и ее высоты. Поэтому длина комнаты меньше ее высоты, то есть меньше, чем 3 метра. Аналогично, взяв соседнюю стену, получим, что и ширина комнаты меньше, чем 3 метра. Поэтому площадь комнаты меньше, чем  $9 \text{ м}^2$ , значит, она меньше, чем  $10 \text{ м}^2$ .

**Критерии проверки:**

приведен верный ответ с полным обоснованием - 7 баллов,

приведен верный ответ и верное, в целом, обоснование, в котором есть пробелы или неточности -5 баллов,

приведен верный ответ без обоснований или приведен неверный ответ - 0 баллов.

7.3. Утром мама налила Пете чай и положила мало сахара, ему пришлось добавить сахар. Днем она положила ему в чай сахара в два раза больше, но он все равно добавил сахар, правда, уже вдвое меньше, чем утром. Во сколько раз маме нужно увеличить дневную порцию сахара для вечернего чая, чтобы Петя остался доволен и не добавлял сахар в чай? (Каждый раз Петя пьет одно и то же количество чая с одинаковым количеством сахара.)

**Ответ:** в 1,5 раза.

**Решение.** Пусть утром мама положила в чай  $x$  г сахара, а Петя добавил  $y$  г. Тогда днем она положила  $2x$  г, а он добавил —  $0,5y$  г. По условию:  $x+y = 2x+0,5y$ , то есть  $x = 0,5y$ . Значит, нужно положить  $x + y = 0,5y + y = 1,5y$  г сахара, а днем мама положила  $2x = y$  г. Следовательно, дневную порцию сахара маме надо увеличить в 1,5 раза.

***Критерии проверки:***

приведены верный ответ и верное решение с полным обоснованием - 7 баллов,

приведено верное рассуждение с полным обоснованием, но ответ дан не на тот вопрос, который задан -5 баллов,

приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию, но не обосновано, что он единственный - 3 балла,

верный ответ получен рассмотрением конкретных числовых значений –2 балла,

приведен только ответ - 1 балл.

7.4 В классе 26 учеников. Мальчики поздравили девочек с праздником 8 марта. Известно, что нет двух мальчиков, поздравивших одинаковое количество девочек. Каждую девочку могли поздравить несколько мальчиков (или, наоборот, ни одного).

Какое наибольшее количество мальчиков может быть в этом классе?

***Ответ:*** 13.

***Решение.*** Если мальчиков 13, то они могли поздравить от 0 до 13 девочек, т.е. такой вариант возможен. Если же мальчиков 14 или более, то девочек в классе не более 12, и различных вариантов для поздравления не более 13 (от 0 до 12). Поэтому найдутся два мальчика, поздравивших одно и тоже количество девочек, что противоречит условию.

***Критерии проверки:***

приведены верный ответ и верное решение - 7 баллов,

приведен верный ответ, но обосновано только, что мальчиков не может быть ровно 14, при этом пояснено, что 13 возможно - 5 баллов,

решение в целом верно, но считается, что каждый мальчик поздравил хотя бы одну девочку - 5 баллов,

доказано только, что мальчиков не могло быть больше 13 - 4 балла,

приведен только верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию - 3 балла.

7.5 Докажите, что сумма всех четырехзначных чисел, в записи которых отсутствуют цифры 0 и цифры 9, делится на 11.

**Решение.** Пусть  $A$  - любое четырехзначное число, в записи которого нет ни цифры 0, ни цифры 9. Тогда число  $B = 9999 - A$  тоже четырехзначное число, в записи которого нет ни цифры 0, ни цифры 9. При этом эти числа различны, так как одно из них четное, а другое нечетное.

Значит, все такие числа можно разбить на пары так, что сумма чисел в каждой паре будет равна 9999. Но тогда сумма всех этих чисел будет делиться на  $9999 = 11 \cdot 909$ .

**Критерии проверки:**

приведено верное обоснованное решение - 7 баллов,

приведено верное решение с недочетом (не указано, что числа  $A$  и  $B$  различны) - 5 баллов.

**Другое решение задачи 7.5.** Чисел, в записи которых нет 0 и 9, всего  $8^4$ , так как в каждый из разрядов можно поставить ровно 8 цифр, и эти расстановки независимы. При этом, если мы фиксируем цифру в каком-то из разрядов, то таких чисел ровно  $8^3$ . Просуммируем все наши числа. У  $8^3$  из них в разряде единиц стоит 1, у  $8^3$  из них в разряде единиц стоит 2, ..., у  $8^3$  из них в разряде единиц стоит 9. Поэтому сумма цифр в разряде единиц равна  $a = (1+2+\dots+9) \cdot 8^3$ . Аналогично, сумма цифр в остальных разрядах такая же. Значит, общая сумма чисел из условия равна  $s = (1+2+\dots+9) \cdot 8^3 \cdot (1+10+100+1000) = 1111a$ . Так как 1111 делится на 11, то и  $s$  делится на 11.