**Всероссийская олимпиада школьников по математике — 2021-22**
**Пермский край, муниципальный этап**

# 9 класс

*Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут (235 минут).*
*Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.*
*Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.*

9.1. Если на доске находится действительное число $x$, то его можно стереть и выписать на доску либо число $x+3$, либо число $3x$, либо число $\frac{x}{3}$. Изначально на доске написано число 1. Можно ли при помощи указанных операций выписать на доску число 2021?

**Ответ.** Да.

**Решение.** Сначала выпишем на доску число $3 \cdot 1 = 3$. Затем будем увеличивать число на доске на 3 до тех пор, пока не выпишем число $2021 \cdot 3$. После этого выпишем на доску число $\frac{2021 \cdot 3}{3} = 2021$.

**Комментарий.** Только ответ «да» — 0 баллов.

9.2. Петя написал на каждой из трёх карточек по действительному числу. Затем для каждой пары карточек он нашёл сумму чисел на них и эти три суммы записал в блокнот. Оказалось, что набор чисел на карточках совпадает с набором чисел в блокноте. Какие числа Петя написал на карточках? Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

**Ответ.** Числа $t$, $-t$ и 0, где $t$ — произвольное действительное число.

**Решение.** Пусть Петины числа $a$, $b$ и $c$. Сумма чисел на карточках равна $a+b+c$, сумма чисел в блокноте равна $(a+b)+(b+c)+(c+a) = 2(a+b+c)$. Так как наборы чисел на карточках и в блокноте совпали, то $a+b+c = 2(a+b+c)$, $a+b+c = 0$. Число $a$ равно одному из чисел $a+b$, $b+c$ и $a+c$. Если $a = a+b$, то $b = 0$. Если $a = a+c$, то $c = 0$. Если $a = b+c$, то $a = a+b+c-a$, $a = -a$, $2a = 0$, $a = 0$.

Итак, на одной из карточек обязательно написан 0. Если на другой карточке написано число $t$, то на оставшейся обязано быть написано число $0-(0+t) = -t$. Значит других ответов кроме троек $(t, -t, 0)$ быть не может, и ясно, что все такие тройки подходят.

**Комментарий.** Дан верный ответ — 2 балла.

Доказано, что сумма чисел на карточках равна 0 — 1 балл.

Баллы по двум предыдущим пунктам суммируются.

9.3. Можно ли покрасить каждую клетку клетчатого квадрата $1000 \times 1000$ в синий или белый цвет так, чтобы в каждом клетчатом квадрате $21 \times 21$ было чётное количество синих клеток, а в каждом клетчатом квадрате $29 \times 29$ — нечётное количество синих клеток?

**Ответ.** Нет.

**Решение.** Предположим, что такая раскраска существует. Внутри квадрата $1000 \times 1000$ выделим любой клетчатый квадрат $S$ со стороной $21 \cdot 29 < 1000$. С одной стороны, он разбивается на $21^2$ квадратов со стороной 29, то есть на нечётное количество квадратов, в каждом из которых нечётное количество синих клеток. Значит в $S$ нечётное количество синих клеток. С другой стороны, он разбивается на $29^2$ квадратов со стороной 21, то есть на некоторое количество квадратов, в каждом из которых чётное количество синих клеток. Значит в $S$ чётное количество синих клеток. Полученное противоречие говорит от том, что наше предположение неверно, и такой раскраски нет.

**Комментарий.** Только ответ «нет» — 0 баллов.

9.4. В прямоугольном треугольнике $ABC$ провели высоту $CH$ к гипотенузе $AB$. Затем отметили середину отрезка $BH$ — точку $F$, и середину отрезка $CH$ — точку $N$. Докажите, что прямые $AN$ и $CF$ перпендикулярны.

**Первое решение.** Так как $\angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$, и $\angle HAC + \angle HCA = 90^\circ$, то $\angle HBC = \angle HCA$. И так как $\angle BHC = \angle CHA = 90^\circ$, то треугольники $BCH$ и $CAH$ подобны по двум углам. Поэтому $\frac{BH}{CH} = \frac{CH}{HA}$, $\frac{2FH}{2NH} = \frac{CH}{HA}$, $\frac{FH}{NH} = \frac{CH}{HA}$. Так как $\angle FHC = \angle NHA = 90^\circ$ и $\frac{FH}{NH} = \frac{CH}{HA}$, то треугольники $FHC$ и $NHA$ подобны. Значит $\angle NAH = \angle FCH = 90^\circ - \angle CFH$, и $\angle NAH + \angle CFH = 90^\circ$, то есть угол между прямыми $AN$ и $FN$ равен $90^\circ$.

**Второе решение.** Так как $FN$ — средняя линия треугольника $BCH$, то $FN \parallel BC$, и значит $FN \perp AC$. По условию $CN \perp FA$. Значит прямые $FN$ и $CN$ содержат две высоты треугольника $FCA$, поэтому прямая $AN$ содержит его третью высоту (высоты треугольника пересекаются в одной точке), и $AN \perp FC$.

9.5. Докажите существование такого натурального числа $n > 1$, что произведение всех натуральных чисел от 1 до $n$ делится на $n^{1000}$.

**Решение.** Возьмём $n = 2^{20}$, и пусть $p$ — произведение всех чисел от 1 до $n$. Заметим, что среди чисел от 1 до $2k$ каждое второе чётное, значит их произведение делится на $2^k$. Поэтому $p$ делится на $2^{2^{19}}$. Так как $2^{19} = 2^{10} \cdot 2^9 = 1024 \cdot 512 > 1000 \cdot 20$, то $2^{2^{19}}$ делится на $2^{1000 \cdot 20} = n^{1000}$, значит $p$ делится на $n^{1000}$.