Всероссийская олимпиада школьников по математике – 2021-22

Пермский край, муниципальный этап

8 класс

Время выполнения заданий – 3 часа 55 минут (235 минут).

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

8.1. В понедельник абсолютно случайно ровно в 12:00 мальчик Леша познакомился около кондитерской с девочкой Леной. Они друг другу очень понравились и договорились встретиться завтра на том же месте в то же время. Но во вторник мальчик Леша долго не решался, идти ли ему, опоздал на 5 минут, никого у кондитерской не встретил и убежал расстроенный. Однако спустя 5 минут передумал и вернулся, опять никого не встретил и снова убежал. Мучаясь сомнениями, он так и продолжал каждые 5 минут подходить к кондитерской и убегать обратно. В тот же вторник девочка Лена долго наряжалась и опоздала на 7 минут, никого у кондитерской не увидела и убежала обиженной. Однако через 7 минут успокоилась, вернулась, опять никого не увидела и снова убежала. Так продолжалось и дальше, каждые 7 минут Лена подходила и убегала. В какое время Лена с Лешей все-таки встретились и отправились гулять вместе?

Ответ. В 12:35.

Решение. Время, прошедшее с 12:00, в которое Леша подходил к кондитерской, делится на 5. Время, в которое подходила Лена, делится на 7. Наименьшее общее кратное 5 и 7 – это 35. То есть через 35 минут впервые Лена и Леша окажутся у кондитерской одновременно.

Критерии. Только ответ – 2 балла. Ответ с проверкой (что действительно в 12:35 оба окажутся у кондитерской), но без пояснений, что это минимальное время – 3 балла.

8.2. У Малыша есть 20 конфет. Карлсон предлагает сыграть ему в следующую игру. На столе стоят три коробки, на которых написано «2», «4» и «5». Малыш может положить в каждую из этих коробок любое число конфет (при этом часть конфет он может оставить и не класть ни в одну из коробок), после чего Карлсон выбирает одну коробку, дарит Малышу за каждую лежащую там конфету столько конфет, какое число написано на коробке (например, за 2 конфеты в коробке с надписью "4" он подарит 8 конфет), а все конфеты из всех коробок забирает себе. Сможет ли Малыш так заполнить коробки, чтобы независимо от выбора Карлсона в результате игры конфет у него стало больше, чем было до начала игры?

Ответ: может.

Решение. Положим в коробку с надписью «2» 10 конфет, с надписью «4» - 5 конфет, с надписью «5» - 4 конфеты (еще 1 конфету отложим и никуда складывать не будем). Тогда независимо от выбора Карлсона Малыш получит в подарок 20 конфет, и в сумме с отложенной у него станет 21 конфета.

Критерии. Только ответ «можно» без указания куда сколько конфет складывать – 0 баллов. Любой неправильный способ заполнения (не гарантирующий увеличение числа конфет **при любом** выборе Карлсона) – 0 баллов. Правильное указание куда сколько конфет складывать без пояснений, почему в итоге количество конфет станет больше – 5 баллов.

8.3. В международной конференции принимали участие ученые из 5 разных стран (каждый ученый представлял одну страну, но от каждой из стран могло быть несколько участников). Когда на одном из заседаний они собрались за круглым столом оказалось, что для любых двух стран нашлась хотя бы одна пара ученых из этих стран, сидящих рядом друг с другом. Какое наименьшее количество ученых могло быть на этом заседании?

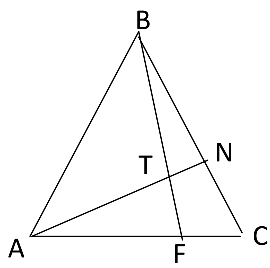
Ответ. 10.

Решение. Посчитаем, сколько можно составить различных пар стран. Для каждой из 5 стран можно поставить в пару любую из оставшихся 4. Но таким образом мы каждую пару стран посчитаем дважды (когда к стране А поставим в пару Б и когда к стране Б поставим в пару А). Таким образом, общее количество различных пар стран равно 5*4/2=10. Поскольку для каждой пары стран должна найтись хотя бы одна пара ученых, значит количество различных пар ученых не меньше 10. Но если за круглым столом сидит N человек, то они образуют N пар. Следовательно, за столом сидело не меньше 10 человек. Покажем, что 10 человек могли сидеть так, чтобы выполнялись условия задачи. Обозначим участников от 1й страны буквой А, от 2-й страны – Б, от 3й – В, от 4й – Г, от 5й – Д. Тогда ученые могли сидеть, например, в таком порядке: А-Б-В-Г-Д-А-Г-Б-Д-В.

Критерии. Доказано, что ученых было не меньше 10 (но не приведен пример, что 10 – возможно) – 4 балла. Приведен пример, что ученых могло быть 10 (но не доказано, что их не могло быть меньше) – 3 балла.

8.4. В равностороннем треугольнике ABC на сторонах AC и BC выбраны точки F и N соответственно. Отрезки AN и BF пересекаются в точке T, и $\angle ATF = 60^0$. Докажите, что AN=BF.

Решение. $\angle ATF$ – внешний угол треугольника BTA, значит $\angle TAB + \angle ABT = 60^0$. Значит $\angle NAB = \angle TAB = 60^0 - \angle ABT = 60^0 - \angle ABF$. Треугольник ABC равносторонний, значит $\angle ABC = 60^0$, $\angle ABF + \angle FBC = 60^0$, откуда $\angle FBC = 60^0 - \angle ABF$. Таким образом, $\angle NAB = \angle FBC$. Кроме того, $\angle ABN = \angle BCF = 60^0$ (углы в равностороннем треугольнике ABC) и AB=BC. Следовательно, треугольники ABN и BCF равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Из равенства треугольников следует, что AN = BF.



8.5. Есть 100 мешков с сахаром. 98 из них полные и весят по 10 кг каждый, а из двух мешков сахар просыпался, и они весят немного меньше 10 кг (но на сколько меньше – не известно). Имеются также электронные весы, показывающие точную массу помещенного на них груза. Однако весы имеют грузоподъемность 100 кг, поэтому больше 10 мешков одновременно на них взвешивать нельзя. Докажите, что за 18 взвешиваний можно гарантированно найти 2 мешка, из которых просыпался сахар.

Решение. С помощью 10 взвешиваний взвешиваем все мешки (разбив их на 10 групп по 10 мешков). Возможны два случая: 1) «недовес» обнаружился в двух группах и 2) «недовес» в одной группе. Разберем случай 1. У нас есть две группы по 10 мешков, в каждой из которых по 1 неполному мешку. Покажем, как с помощью 4 взвешиваний найти 1 неполный мешок среди 10. Первым взвешиванием взвесим 5 мешков. Если они весят положенные 50 кг, то неполный мешок – в другой группе из 5 мешков, если же весы показали меньше 50 кг, то неполный мешок во взвешиваемой группе. У нас осталось 3 взвешивания и группа из 5 мешков. Вторым взвешиванием взвесим 2 мешка из этой группы. Неполный либо среди них, либо среди 3 оставшихся. Даже если он среди 3 оставшихся, двух взвешиваний (по 1 мешку из этой группы) гарантированно хватит, чтобы найти неполный мешок. Итак, с помощью 4 действий находим неполный мешок в одной группе из 10 мешков, и еще с помощью 4 – во второй группе. Всего совершено 18 взвешиваний. Теперь разберем случай 2. У нас есть 1 группа из 10 мешков, в которой 2 мешка – неполные. Разобьем эти 10 мешков на 5 пар и взвесим каждую пару. Если недовес только в одной паре – эта пара мешков и является неполной. Если недовес в двух парах, то взвешивая по одному мешку из каждой пары (еще 2 взвешивания) определяем, какой мешок в каждой паре неполон. Всего совершено не более, чем 10+5+2=17 взвешиваний.

Комментарий. Алгоритм взвешиваний может быть и другим.