Всероссийская олимпиада школьников по математике – 2021-22

Пермский край, муниципальный этап

10 класс

Время выполнения заданий – 3 часа 55 минут (235 минут).

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

10.1. На склад привезли 57 тонн груза. Для вывоза этого груза дали 10 машин грузоподъемностью 8 тонн, 5 тонн и 4 тонны. Сколько машин каждого вида дали, если все машины были загружены полностью, сделали по одному рейсу и весь груз был вывезен?

Решение. Пусть x, y, z – количество машин грузоподъёмностью 8 тонн, 5 тонн и 4 тонны соответственно. По условиям задачи составим систему уравнений

$$\begin{cases} 8x+5y+4z=57, \\ x+y+z=10. \end{cases}$$

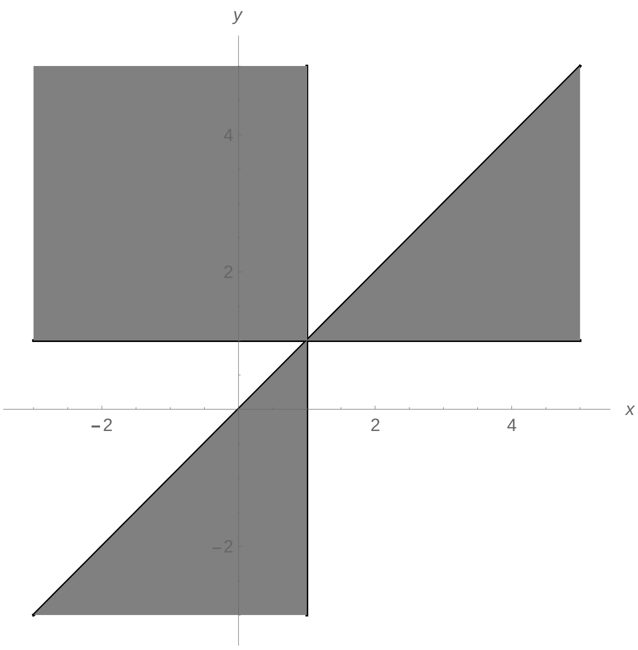
Выразим $z=10-x-y$ и подставим в первое уравнение. Получаем уравнение $4x+y=17$, которое при неотрицательных x, y и $x+y<10$ имеет два решения: $x_1=3$, $y_1=5$ и $x_2=4$, $y_2=1$. Соответственно, $z_1=2$ и $z_2=5$.

Комментарий. Один из ответов и нет объяснений, почему другие варианты не подходят – 2 балла, Оба ответа без объяснений – не более 4 баллов.

10.2. Укажите на плоскости xOy все точки (x, y) для координат которых справедливо неравенство $x+x^2y+y^2>y+y^2x+x^2$.

Решение. Преобразуем выражение:

$$y-x+y^2x-x^2y+x^2-y^2=(y-x)(1+xy-x-y)=(y-x)(1-x)(1-y).$$



Поэтому $0>(y-x)(1-x)(1-y)$.

Нарисуем графики функций $y=x, x=1, y=1$. Плоскость xOy разбивается на 6 частей. В каждой части знак всех трех скобок $(y-x)(1-x)(1-y)$ сохраняется. Проверяя неравенство в каждой части, закрашиваем части, где $(y-x)(1-x)(1-y)<0$.

Следовательно, точки (x, y) должны быть таковы, что либо $x<1, y>1$, либо $x>y>1$, либо $y<x<1$.

Комментарий. Если сделаны аналитические преобразования и задача сведена к неравенству

$(y-x)(1-x)(1-y)<0$, то 4 балла. Если найдены все три области – 7 баллов, если две – 6 баллов, если одна область – 5 баллов. При отсутствии картинки, но с правильным аналитическим описанием областей оценку не снижать.

10.3. Последовательность действительных чисел x_n $(n=1,2,3,...)$ обладает свойством $x_{n+m}=x_n+x_m$ $(n,m=1,2,3,...)$. Известно, что $x_1=a$. Найдите все элементы последовательности.

Решение. Положим $n=m=1$ и найдем $x_2=x_1+x_1=2a$. Применим принцип математической индукции. Предположим, что первые k элементов имеют вид $x_k=ka$, тогда элемент x_{k+1} можно вычислить как $x_{k+1}=x_k+x_1=ka+a=(k+1)a$. Значит, все элементы последовательности имеют вид $x_n=na$. Заметим, что найденная последовательность удовлетворяет равенству $x_{n+m}=x_n+x_m$ при любых n и m, а значит, является единственным решением задачи.

Комментарий. Если метод математической индукции присутствует в неявном виде, баллы не снимаются. Только ответ – 2 балла. Ответ, демонстрация его верности, но без объяснения, почему других ответов не будет – не более 4 баллов.

10.4. ABCD – прямоугольник. Точка *M*, лежащая на стороне *BC*, соединена с вершинами *A* и *D*, а на отрезке *MD* отмечена точка N. Оказалось, что углы *AMD*, *DMC* и *BAN* равны. Определите, какую часть от площади прямоугольника *ABCD* составляет площадь треугольника *AND*.

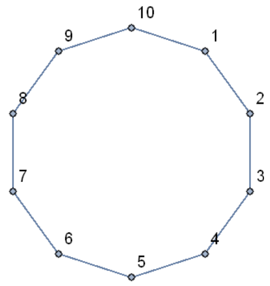
Решение. Обозначим $\angle DMC=\alpha$, тогда $\angle BMN=180°-\alpha$.

Рассмотрим четырехугольник *ABMN*. Его сумма углов $360°=\alpha+90°+(180°-\alpha)+\angle MNA$, то есть $\angle MNA=90°$. В $\triangle MAN$ имеем $\angle MAN=180°-90°-\alpha=90°-\alpha$. Кроме того, $\angle NAD=\angle BAD-\angle BAN=90°-\alpha$. Значит, AN – высота и биссектрисса $\triangle AMD$. Поэтому $S_{AND}=\frac{1}{2}S_{AMD}$. Найдём $S_{AMD}=\frac{1}{2}AD*AB=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Следовательно, $\frac{S_{AND}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Комментарий. Доказано, что AN является высотой ΔAMD – 1 балл. Есть доказательство того, что AN – высота и биссектриса ΔAMD, – не более 4 баллов.

10.5. На планете Плюк-Глюк время измеряется в тиках, в сутках 20 тиков. Циферблат измерителя времени, похожий на земные часы со стрелками, имеет 10 делений. У двоих жителей Плюк-Глюка есть сломанный измеритель времени с одной стрелкой, и она указывает на число 10. Они придумали игру: каждый из них по очереди двигает стрелку (за один ход её можно передвинуть на 2 или 3 деления вперёд по часовой стрелке). Малиновые штаны получает тот, кто первым поставит стрелку на 9, после чего игра завершается. Как играть в эту игру, чтобы стать обладателем малиновых штанов? Каждый из игроков желает заполучить малиновые штаны себе.

Решение.



Рассмотрим игру в обратном порядке, начиная с последнего хода. Если стрелка находится на цифре 7 или 6, то игрок, который будет ходить, выиграет, передвинув стрелку на 9. Значит, 6,7 – выигрышные позиции. Если стрелка находится на 4, то игрок, который ходит, за один ход может попасть только в 6 или 7, а значит, соперник окажется в выигрышном положении. Поэтому 4 – проигрышная позиция. В 4 можно попасть из 2 или 1, и поставить соперника в проигрышное положение, т.е. 2 и 1 – выигрышные позиции. Остались 10, 3, 5, 8. Если первый игрок из 10 сходит в 2, то поставит соперника в выигрышную позицию, а значит, проиграет, то есть первый игрок сходит в 3. Второй игрок из 3 не пойдет в 6, т.к. поставит соперника в выигрышную позицию, значит, сходит в 5. Первый игрок не пойдет в 7, а пойдет в 8. Второй игрок из 8 не пойдет в 1, а сходит в 10. Таким образом, игра приходит в начальное положение (зацикливается). Следовательно, игроки будут играть вечно и никто не сможет выиграть.

Комментарий. Неиспользование понятия выигрышных позиций не наказывается. Только ответ – 0 баллов. Написано, но не доказано, что игроки будут ходить по 10,3,5,8 – не более 3 баллов.