Всероссийская олимпиада школьников по математике — 2021-22
Пермский край, муниципальный этап

11 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут (235 минут).
Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.
Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

11.1. По окончании волейбольного турнира, в котором каждая команда встречалась с каждой из остальных по два раза, оказалось, что 20% команд не одержали ни одной победы (ничьих в волейболе не бывает). Сколько всего встреч было проведено в этом турнире? Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

Ответ. 20.

Решение. Предположим, что есть хотя бы две команды, которые не выиграли ни одной игры. Но эти команды по условию играли друг против друга, значит одна из них должна выиграть хотя бы одну игру. Поэтому число команд, не выигравших ни одной игры, либо ровно 0, либо ровно 1. По условию первый случай невозможен, значит 1 команда — 20% от всех команд, и команд всего 5. Так как каждая команда играет с 4 соперниками, то каждая команда играет 8 игр, и $8 \cdot 5$ — удвоенное число игр, так как каждую игру мы подсчитали для обоих участников. Итак, всего было сыграно 20 игр.

Комментарий. Дан верный ответ — 2 балла.

Доказано, что количество команд равно 5 — 3 балла.

Баллы по двум предыдущим пунктам суммируются.

11.2. Докажите, что среди чисел вида $3^n - 3^m$, где n и m — натуральные числа, содержится куб натурального числа, больший 10^{2021}.

Первое решение. Возьмём $n = 3k+2$, $m = 3k$, где $k = 2021$, тогда $3^n - 3^m = 3^{3k+2} - 3^{3k} = 3^{3k}(3^2 - 1) = (2 \cdot 3^k)^3$. Так как $3^3 = 27 > 10$, то $(2 \cdot 3^k)^3 > (3^3)^k > 10^k = 10^{2021}$.

Второе решение. Возьмём $n = 3k + 2$, $m = 3k$, где k — натуральное, тогда $3^n - 3^m = 3^{3k+2} - 3^{3k} = 3^{3k}(3^2 - 1) = (2 \cdot 3^k)^3$. Понятно, что при каждом k мы получаем новый куб натурального числа. Значит таких кубов будет бесконечное количество, и их значения не могут быть ограничены. Поэтому найдётся куб, больший 10^{2021}.

11.3. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна меньшему основанию BC, а диагональ AC равна основанию AD. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает прямую DC в точке N. Докажите, что AN — биссектриса угла BAC.

Первое решение. Так как $BN \parallel AC$ и $BC \parallel AD$, то $\angle BNC = \angle ACD$, $\angle BNA = \angle NAC$ и $\angle ADC = \angle BCN$. Так как треугольник ADC равнобедренный и $AD = AC$, то $\angle ACD = \angle ADC$. Поэтому $\angle BNC = \angle BCN$ и значит $BN = BC = AB$. Тогда $\angle BAN = \angle BNA = \angle NAC$.

Второе решение. Отметим на луче AC за точку C точку F, а на луче AB за точку B точку T. По условию $AB = BC$ и $AC = AD$, значит $\angle BAC = \angle BCA$ и $\angle ADC = \angle ACD$. Так как $BN \parallel AC$, то $\angle TBN = \angle BAC = \angle BCA = \angle CBN$. Так как $BC \parallel AD$, то $\angle BCN = \angle ADC = \angle ACD = \angle NCF$. Итак, мы доказали, что BN — биссектриса угла TBC, значит N равноудалена от прямых TB и BC, а CN — биссектриса угла BCF, значит N равноудалена от прямых BC и CF. Поэтому точка N равноудалена от прямых TB и CF, значит AN — биссектриса угла BAC.

Комментарий. Доказано, что треугольник BCN равнобедренный — 3 балла.

11.4. Положительные действительные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $\dfrac{a+b}{c+d} < 2$. Докажите, что $\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2} < 8$.

Решение. Заметим, что для любых чисел x и y выполнено неравенство $(x-y)^2 \geqslant 0$, значит $2xy \leqslant x^2+y^2$. Так как $\dfrac{a+b}{c+d} < 2$, то $a+b < 2(c+d)$, $(a+b)^2 < 4(c+d)^2$, $a^2+2ab+b^2 < 4(c^2+2cd+d^2)$. Так как $2cd \leqslant c^2+d^2$, то $4(c^2+2cd+d^2) \leqslant 4(c^2+d^2+c^2+d^2) = 8(c^2+d^2)$. Итак, $a^2+b^2 < a^2+2ab+b^2 < 4(c^2+2cd+d^2) \leqslant 8(c^2+d^2)$, значит $\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2} < 8$.

11.5. Можно ли покрасить каждую точку плоскости либо в красный, либо в синий цвет так, чтобы на каждой прямой были точки обоих цветов и на каждой прямой находилось конечное количество точек синего цвета?

Ответ. Да.

Первое решение. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат и рассмотрим множество F, являющееся графиком функций $y = x^3$. Покрасим все точки F в синий цвет, остальные — в красный. Докажем, что эта раскраска удовлетворяет условию задачи.

Если прямая вертикальна, то она задана уравнением $x = a$, и пересекается с F ровно по одной точке (a, a^3). Если прямая не вертикальна, то она задана уравнением $y = kx + b$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - kx - b$. Так как

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ и функция $f(x)$ непрерывна, то найдётся число a, для которого $f(a) = 0$. Значит уравнение $x^3 = kx + b$ имеет хотя бы одно решение. Итак, любая прямая пересекается с F, то есть на любой прямой есть синяя точка.

Понятно, что количество точек пересечения прямой $y = kx + b$ и F не превосходит числа корней кубического уравнения $x^3 = kx + b$, которое не больше 3. Значит на каждой прямой не более 3 синих точек.

Второе решение. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат и рассмотрим множество F, полученное объединением графиков функций $y = x^2$ и $y = -x^2$. Покрасим все точки F в синий цвет, остальные — в красный. Докажем, что эта раскраска удовлетворяет условию задачи.

Если прямая вертикальна, то она задана уравнением $x = a$, и пересекается с F по двум точкам (a, a^2), $(a, -a^2)$ (эти точки могут совпадать). Если прямая не вертикальна, то она задана уравнением $y = kx+b$. Либо уравнение $x^2 = kx+b$, либо уравнение $-x^2 = kx + b$ имеет хотя бы одно решение. Действительно, дискриминант первого — $D_1 = k^2 + 4b$, дискриминант второго — $D_2 = k^2 - 4b$, $D_1 + D_2 = 2k^2 \geqslant 0$, значит хотя бы один из дискриминантов неотрицателен. Значит любая прямая пересекается с F, то есть на любой прямой есть синяя точка.

Понятно, что количество точек пересечения прямой $y = kx + b$ и F равно суммарному количеству решений двух вышеназванных уравнений, которое не превосходит четырёх. Значит на каждой прямой не более 4 синих точек.

Комментарий. Только ответ «да» — 0 баллов.

Приведена раскраска, отвечающая условиям задачи — 3 балла.

Приведена правильная раскраска и доказано, что на каждой прямой находится хотя бы одна синяя точка — 2 балла.

Приведена правильная раскраска и доказано, что на каждой прямой находится конечное количество синих точек — 2 балла.

Баллы по трём предыдущим пунктам суммируются.

Замечание. То, что многочлен нечётной степени имеет хотя бы один корень считается очевидным. Считается известным, что многочлен степени n имеет не более n корней.